$SU(3)$ è generato da matrici M 3×3, hermitiane, $\mathrm{Tr}=0$

$\lambda_{i=1\ldots8}$

$T_x = \frac{1}{2}\lambda_1$ così ci possiamo trovare le matrici di Pauli $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

T_y

T_z

$V_x = \frac{1}{2}\lambda_4$ $\quad V_y = \frac{1}{2}\lambda_5$

$U_x = \frac{1}{2}\lambda_6$ $\quad U_y = \frac{1}{2}\lambda_7$

$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$

Non ci sono V_z e U_z perché ci sono solo 8 matrici in $SU(3)$ e ci possono essere solo 2 generatori diagonali. Storicamente sono

$$T_z = "\sigma_z" \quad e \quad Y = \lambda_8$$

Che algebra di Lie definiscono? Basta vedere che commutatori escono fuori. Usiamo $T_\pm = T_x \pm i T_y$

$$U_\pm =$$

$$V_\pm =$$

$$[t_+, t_-] = 2t_z$$

$$[t_+, u_+] = v_+$$

$$[t_+, v_-] = -u_-$$

$$[t_+, y] = 0$$

$$[u_+, u_-] = \tfrac{3}{2} y - t_z$$

$$[v_+, v_-] = \tfrac{3}{2} y + t_z$$

$$[t_z, v_\pm] = \pm v_\pm$$

$$[t_z, u_\pm] = \mp u_\pm$$

$$[y, u_\pm] = u_\pm$$

$$[y, V_\pm] = V_\pm$$

RAPPRESENTAZIONE AGGIUNTA

Così come ci sono rappresentazioni di varia dimensionalità per $SU(2)$ e il momento angolare anche per $SU(3)$ ci sono un certo numero di rappresentazioni.

Essendo partiti con 8 matrici soggette ad una tavola di regole di commutazione possiamo definire una rappresentazione 8-dimensionale, che deve rispettare le regole del prodotto di Lie

Dal set $= \{ \lambda_i \}$ (o meglio dei $\{ U_\pm, V_\pm, t_\pm, y, t_z \}$)

derivo delle trasformazioni ad esse associate

Il caso delle matrici 3×3 visto all'inizio era

$$t_{i=1..8} \longmapsto \text{matrici } 3\times3 \ \lambda_{i=1...8}$$

Adesso invece faccio

$$t_{i...8} \longmapsto 8 \text{ operazioni } Ad\,\lambda_i :$$

$$x \to [\lambda_i, x]$$

Ad rispetta le regole del prodotto di Lie, quindi è una rappresentazione.

Se $[x,y] = z$ è la relazione dell'algebra di Lie posso verificare che $\underline{[\mathrm{Ad}\,x, \mathrm{Ad}\,y]\,w = \mathrm{Ad}\,z\; w \quad \forall w \in L}$

$$[\mathrm{Ad}\,x, \mathrm{Ad}\,y]\,w = (\mathrm{Ad}\,x)(\mathrm{Ad}\,y)w - (\mathrm{Ad}\,y)(\mathrm{Ad}\,x)w$$

$$= [x,[y,w]] \underbrace{- [y,[x,w]]}_{+[y,[w,x]]} \overset{\text{Id Jacobi}}{=} -[w,[x,y]] = [[x,y],w]$$

$$= [z,w]$$

$$= (\mathrm{Ad}\,z)\,w$$

∎

Si possono trovare rappresentazioni matriciali 8×8 tramite la rel. $(\mathrm{Ad}\,\lambda_k)_{ij} = [\lambda_k, \lambda_j]_{\lambda_i}$

da cui:

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} [t_+,t_+] & [t_+,t_-]=2t_z \end{array} & \\
\text{• } \mathrm{Ad}\, t_+ = \begin{pmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \overline{0} & & & & \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \overline{0} & & & & \\
 & & & \overline{0} & & & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & O_{2\times 8} & & & &
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} t_+ \\ t_- \\ t_z \\ u_+ \\ u_- \\ v_+ \\ v_- \\ y \end{array}
\end{array}
$$

• $\mathrm{Ad}\, t_z = \mathrm{diag}\left(1, -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

• $\mathrm{Ad}\, y = \mathrm{diag}\left(0, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0\right)$

$\mathrm{Ad}\, t_z$ e $\mathrm{Ad}\, y$ sono diagonali e sono le uniche che

$\forall\ h = a t_z + b y$ ha una aggiunta diagonale

$$
\mathrm{Ad}\, h \Big|_{h = a t_z + b y} = \begin{pmatrix}
a & & & & & & & \\
 & -a & & & & \overline{0} & & \\
 & & 0 & & & & & \\
 & & & -\frac{1}{2}a+b & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2}a-b & & & \\
 & \overline{0} & & & & \frac{1}{2}a+b & & \\
 & & & & & & -\frac{1}{2}a-b & \\
 & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

questo implica che $t_\pm, t_z, u_\pm, v_\pm, y$ sono tutti autovettori di Ad h, cioè $\quad \mathrm{Ad}\,h\; t_+ = a\, t_+ \quad a[t_z, t_+] + b[y, t_+] = a t_+$

$$\mathrm{Ad}\,h\; t_- = -a\, t_-$$

$$\mathrm{Ad}\,h\; t_z = 0 \qquad a[t_z, t_z] + b[t_z, y] = 0$$

A questo punto possiamo suddividere i generatori in due tipi

- "h" generatori la cui Ad è diagonale
- "e" autovettori della Ad di qualunque comb. lin di h

$$L = \mathcal{H} \oplus \Sigma$$

$\Sigma = \{t_\pm, u_\pm, v_\pm\}$

sotto - Algebra di Cartan $= \{t_z, y\}$

GLI AUTOVALORI DEI GENERATORI IN Σ DIPENDONO DALL'ELEMENTO IN $\mathcal{H}$ DA CUI FACCIO L'AGGIUNTA.

	t_+	y
$\mathrm{Ad}\,(a t_z + y)\, t_+ = a t_+$	✓	x

⋮

$\mathrm{Ad}\, h = a t_+ + b y$ non contiene a in due casi, mentre non contiene y in 4

SIMBOLICAMENTE POSSO DIRE CHE

$$\mathrm{Ad}\,(a t_z + b y)\, u_+ = \left(-\frac{a}{2} + b\right) u_+$$

definisce una funzione / funzionale da H a $\mathbb{C}$ (se $a, b \in \mathbb{C}$)

$$\alpha_{u_+}(a t_z + b y) = -\frac{1}{2}a + b$$

$$\alpha_{u_-}(a t_z + b y) = -\alpha_{u_+}$$

$$\alpha_{v_+}(a t_z + b y) = \frac{1}{2}a + b = -\alpha_{v_-}$$

$$\alpha_{t_+} = -\alpha_{t_-} = a$$

3 radici a cui le loro opposte

Queste funzioni vengono chiamate RADICI. Vi è una RADICE per ciascun e in Σ. Le funzioni / funzionali agiscono su elementi di H

$$\alpha : H \to \mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R}$$ (se $a, b \in \mathbb{R}$ si dice H_0)

Gli $e_i \in \Sigma$ sono chiamati vettori radice

H^*

Le radici sono oggetti nello spazio duale H.

in cui $|\,\rangle$ vive nello spazio vettoriale e $\langle\,|$ è quell'oggetto che applicato a $|\,\rangle$ da un $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$